MATEMÁTICA

01. História da Matemática

a) No Renascimento, os trabalhos matemáticos dos Gregos revivem, graças às traduções árabes. É assim que no século XVII, o matemático francês Pierre de Fermat (1601-1665) tomou conhecimento dos escritos de Diofanto. Foi a leitura de uma tradução latina de Aritméticas de Diofanto que suscitou seu interesse por esse domínio da matemática. A maioria dos enunciados estabelecidos por Fermat, considerados hoje como fundamentos modernos da teoria dos números, foram inscritos na margem de sua cópia desta obra de Diofanto. Eis um desses enunciados.
Teorema: Todo número primo $p>2$ pode se exprimir de modo único como a diferença de dois quadrados. **Demonstre**.

b) Ninguém sabe exatamente quando nasceu ou morreu Diofanto. No entanto, sabemos quantos anos ele viveu, devido ao enigma elaborado por um de seus discípulos para descrever a vida do mestre:

> *A juventude de Diofanto durou* $1/6$ *de sua vida; depois de mais* $1/12$ *, nasceu-lhe a barba. Ao fim de mais* $1/7$ *de sua vida, Diofanto casou-se. Cinco anos depois teve um filho. O filho viveu exatamente a metade do que viveu o pai, e Diofanto morreu quatro anos depois da morte de seu filho. Tudo isso somado é o número de anos que Diofanto viveu.*

Calcule a idade de Diofanto.

c) Os pitagóricos determinaram diversas maneiras de dividir um segmento de reta para construir relações. Um desses métodos trata de determinar um ponto C sobre um segmento de reta AB tal que $\frac{m(AB)}{m(AC)} = \frac{m(AC)}{m(CB)}$.
Essa proporção, denominada divina proporção, muito privilegiada pelos artistas no curso dos séculos, foi considerada como a chave do equilíbrio e da harmonia.
Fazendo $m(AB) = a$ e $m(AC) = b$, mostre que o valor positivo de $\frac{a}{b}$ é $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, denominado número áureo e representado pela letra grega minúscula φ (leia-se ***fi,*** correspondente ao nosso "f")

2. Equações Diferenciais: Equações Diferenciais Ordinárias

a) A equação de Bernoulli apareceu pela primeira vez na investigação de um problema famoso: o do cálculo da curva isócrona. Em maio de 1690, num artigo publicado no periódico científico "Acta Eruditorum", Jacobi Bernoulli mostrou que o problema de determinar a curva isócrona era equivalente a resolver certa equação diferencial de primeira ordem, não-linear. Tal curva tinha sido estudada por Huygens em 1687 e por Leibniz em 1689. Defina a equação de Bernoulli e apresente a sua solução;

b) As equações diferencias de Riccati (Conde Jacopo Francesco Riccati) são importantes para a construção de modelos para monitorar fenômenos associados a linhas de transmissão, teoria de ruídos e processos aleatórios, teoria do controle, problemas de difusão, etc. Defina a equação de Riccati de primeira ordem e apresente seu método de resolução bem como sua estreita relação com a equação de Bernoulli.

c) A equação diferencial Fundamental, as equações lineares de primeira ordem homogêneas (e algumas não – homogêneas também, mas nem todas) e algumas equações de Bernoulli e Riccati, são exemplos de equações diferenciais de variáveis separáveis. Defina equações diferenciais separáveis e apresente os procedimentos para encontrar sua solução;

d) Defina as equações diferenciais de coeficientes homogêneos, redutíveis a equações separáveis, e descreva sua solução.

e) Hoje é muito comum encontrarmos "fazendas de criação de peixes" nas quais existem grandes tanques onde determinadas espécies de peixes são criadas e se desenvolvem até alcançarem o tamanho e o peso comercializáveis, seja na venda aos mercados atacadistas, seja nos pesque e pague (em geral nos dois). Existem modelos matemáticos que permitem determinar o peso ideal que os animais da safra devem ter para serem comercializados. O peso p(t) dos peixes de uma dada espécie, em cada instante "t", é dado pela equação (obtida experimentalmente):

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p^{\frac{2}{3}} - \beta p,$$

Onde α e β são constantes, chamadas respectivamente de constante de anabolismo e constante de catabolismo, e têm a ver com os processos de assimilação e de eliminação de alimentos, representando as taxas de síntese e de diminuição de massa por unidade de superfície do animal. Trata-se de uma equação de Bernoulli, que estabelece que o aumento de peso dos peixes é proporcional à área de sua superfície. Mostre que a equação de Bernoulli acima tem a solução onde c, é uma constante de integração arbitrária.

$$p(t) = \left[\frac{\alpha}{\beta} + \frac{c\alpha}{\beta} e^{-\frac{\beta t}{3}}\right]^3$$

03. Álgebra Linear: sistemas lineares e transformações lineares

Relacione o conteúdo de Sistemas Lineares com as transformações lineares, explicitando os seguintes aspectos:

a) Conceito de sistema linear e de transformação linear;
b) Conceito de operador linear;
c) Conceito de Núcleo e Imagem;
d) Propriedades das transformações lineares;
e) As condições para que uma função seja considerada uma transformação linear;
f) Formalização matemática da projeção, reflexão, rotação, dilatação, contração e cisalhamento horizontal e vertical no R^2 e no R^3, exemplificando cada um;
g) Composição/composta de duas ou mais transformações lineares (exemplifique);
h) Inversa de uma transformação linear;
i) Aplicações de transformações lineares em contextos científicos e acadêmicos.

04. Cálculo Diferencial e Integral: vetor gradiente

O matemático suíço Johann Bernoulli afirmou certa ocasião que:

> *Assim como é fácil encontrar a diferencial de certa quantidade, é difícil encontrar a integral de uma diferencial. Mais do que isso, às vezes nem podemos dizer com certeza se a integral de uma certa quantidade pode ou não ser encontrada*.

Em relação à afirmação de Bernoulli:

a) Discuta a afirmativa de Bernoulli com base no cálculo utilizado na atualidade;
b) Caso a afirmativa seja verdadeira, use integrais para prová-la;
c) Mostre como você discutiria a questão apresentada caso estivesse trabalhando com um aluno do curso de Licenciatura em Matemática.

05. Cálculo Diferencial e Integral: aplicações de integrais duplas e triplas

Na atualidade, quase tudo depende de funções de várias variáveis: pressão atmosférica, temperatura, densidades de massa ou de carga elétrica, grandezas econômicas, grandezas mecânicas (como a posição, a velocidade e a aceleração). As integrais duplas e triplas são ferramentas essenciais na determinação de significados para diversas situações que nos rodeiam. Assim considerando, pede-se discutir:

a) A aplicação das integrais duplas e triplas para o cálculo de área;
b) A aplicação das integrais duplas e triplas para o cálculo de volume;
c) Como as integrais duplas e triplas vêm se tornando cada vez mais importantes ao longo da história;
d) Como você mostraria ao seu aluno a importância das integrais duplas e triplas se o mesmo fosse:
   - de um curso de licenciatura em Matemática;
   - de um curso de graduação em Engenharia;