MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

REITORIA

Avenida Rio Branco, 50 – Santa Lúcia – 29056-255 – Vitória – ES

27 3357-7500

EDITAL Nº. 04, DE 13 DE JULHO 2012
CONCURSO PÚBLICO DE PROVAS E TÍTULOS

ÁREA/SUBÁREA/ESPECIALIDADE: 416
MATEMÁTICA

Pontos:

01. Cálculo de áreas das principais figuras planas. Cálculo de áreas e volumes dos principais sólidos geométricos. Integral definida e volumes de sólidos de revolução.

A dissertação deve contemplar cada um dos itens abaixo:

a) Defina cinco figuras planas e dê a fórmula do cálculo de suas áreas. Defina hexágono regular de lado l e demonstre a fórmula do cálculo da sua área.
b) Demonstre a fórmula da área do triângulo ABC em função dos lados:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Onde a,b e c são os lados do triângulo ABC e p o semiperímetro do triângulo ABC.
c) Demonstre como calcular o volume de um tetraedro regular de aresta a.
d) Demonstre como calcular o volume de um octaedro regular de aresta a.
e) Demonstre como calcular a área da superfície de um cone reto de altura h e raio r.
f) Explique duas formas distintas de como usar integrais para o cálculo do volume de sólidos de revolução.
g) Calcule o volume da esfera de raio R usando a integral definida.
h) Use integral definida para calcular o volume do tronco de cone reto com raio da base maior igual a R e raio da base menor igual a r.

02. Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) e Transformadas de Laplace.

A dissertação deve contemplar cada um dos itens abaixo:

a) Explique o que é uma equação diferencial ordinária. Classifique as equações diferenciais ordinárias quanto à ordem e a linearidade. Exemplifique.
b) Escreva a forma geral de uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem e dê exemplos. Obtenha um método para encontrar a solução geral de uma equação linear de primeira ordem.
c) Exiba um problema de valor inicial, representando uma situação real, envolvendo equações diferenciais de primeira ordem e encontre a solução deste problema.
d) Defina "equação diferencial ordinária linear de segunda ordem". Enuncie o Teorema de Existência e Unicidade para EDO's lineares de segunda ordem e dê exemplos de aplicação do teorema.
e) Demonstre o teorema: "Suponha que y_1 e y_2 são duas soluções da equação

$$(1)\quad y''+p(t)y'+q(t)y=0,$$

e que o wronskiano $W=y_1y'_2-y'_1y_2$ não se anula no ponto t_0, onde são dadas as condições iniciais

$$(2)\quad y(t_0)=y_0\,,\quad y'(t_0)=y'_0\,.$$

Então existe uma escolha das constantes c_1 e c_2 para as quais $y=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$ satisfaz a equação diferencial (1) e as condições iniciais (2)."
f) Demonstre: "Suponha que y_1 e y_2 são duas soluções da equação

$$(1)\quad y''+p(t)y'+q(t)y=0,$$

e se existe um ponto t_0 onde o wronskiano de y_1 e y_2 é diferente de zero, então a família de soluções $y=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$ com coeficientes arbitrários c_1 e c_2, inclui todas as soluções da equação (1)."
g) Obtenha a solução geral da equação diferencial $ay''+by'+cy=0$, com a, b e c constantes e $a\neq 0$.
h) Defina o que é transformada de Laplace de uma função e obtenha as transformadas de Laplace das funções: a) $y=t^n,\ n\in IN$; b) $y=e^{at}$; c) $y=\cos at$; d) $y=\operatorname{sen} at$.
i) Considere que $L(f(t))$ represente a transformada de Laplace de uma função $f(t)$ e demonstre o teorema: "Suponha que f é contínua em qualquer intervalo $0\leq t\leq A$, e que f' também é contínua em qualquer intervalo $0\leq t\leq A$, exceto possivelmente em finitos pontos $t_1, t_2,\ldots,t_n$. Suponha, além disso, que existem constantes K, a e M tais que $|f(t)|\leq Ke^{at}$ para $t\geq M$. Então $L(f(t))$ existe para $s>a$ e, além disso, $L(f'(t))=sL(f(t))-f(0)$." Verifique que se f' e f'' satisfazem as mesmas condições impostas em f e f', respectivamente, no teorema acima, então $L(f''(t))$ também existe para $s>a$ é dada por $L(f''(t))=s^2L(f(t))-sf(0)-f'(0)$.
j) Dê exemplos de problemas de valor inicial e encontre a solução usando a transformada de Laplace.

03. Integral de função real de uma variável e Integrais Múltiplas.

A dissertação deve contemplar cada um dos itens abaixo, nos quais f e g são funções reais de uma variável, e $[a,b]$ é um intervalo real.

a) Defina a integral $\int_a^b f(x)dx$ como o limite de somas de Riemann. Dê um exemplo de cálculo de integral de uma função não constante usando soma de Riemann.

b) Se f e g são funções integráveis em $[a,b]$, mostre que:

c)

i. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

ii. Se $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$ então $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

d) Enuncie e demonstre o Teorema Fundamental do Cálculo. Dê um exemplo do uso do teorema.

e) Enuncie e demonstre a Regra da Substituição, dê exemplos do uso dessa regra.

f) Enuncie e demonstre a fórmula (regra) de integração por partes para integrais definidas. Dê exemplos do uso dessa regra.

g) Defina integral imprópria e dê um exemplo para cada tipo definido.

h) Enuncie o Teorema de Fubini para integrais duplas. Dê exemplos de aplicação do Teorema.

i) Use a integral dupla, em coordenadas polares, para calcular a área dentro da circunferência $r = 3sen\ \theta$ e fora do cardióide $r = 1 + sen\theta$.

j) Dê exemplos do uso da integral dupla para o cálculo de volume.

k) Dê exemplos do uso da integral tripla para o cálculo de volume.

04. Limites, Continuidade e Derivadas de funções reais de uma variável.

A dissertação deve contemplar cada um dos itens abaixo, nos quais f e g são funções reais de uma variável, e a é uma constante real.

a) Defina formalmente o limite de uma função real $y = f(x)$ em $x = a$. Usando a definição formal de limite, dê exemplos de cálculo de limite de funções não constantes.
b) Defina função contínua em $x = a$ e demonstre o teorema: "Se g for contínua em a e f em $g(a)$ então a função composta $f \circ g$ é contínua em a."
c) Demonstre o teorema do Confronto. Dê exemplos.
d) Dê a definição formal da derivada de uma função $y = f(x)$ em $x = a$ como um limite. Interprete a derivada como a inclinação de uma reta tangente ao gráfico da função. Explique por que a derivada de uma função $y = f(x)$ pode ser interpretada como uma função.
e) Use a definição da derivada como limite para mostrar que a função $f(x) = x^n$ tem derivada igual a $f'(x) = nx^{n-1}$, admita n inteiro positivo. Demonstre as regras de Derivação: regra da soma e a regra do produto. Dê um exemplo do uso de cada regra.
f) Demonstre o Teorema de Fermat: "Se f tiver um máximo ou mínimo local em a e $f'(a)$ existir, então $f'(a) = 0$".
g) Mostre que se $f'(x) = g'(x)$ para todo x em um intervalo (a,b), então $f(x) = g(x) + c$, onde c é uma constante real.
h) Seja $y = f(x)$. Explique como usar limites, a derivada primeira e a derivada segunda, $f'(x)$ e $f''(x)$ respectivamente, para construir o gráfico de $y = f(x)$.
i) Esboce o gráfico da função $y = e^{-x^2}$ usando limites, a derivada primeira e a derivada segunda.
j) Explique o que é diferenciação implícita e dê um exemplo de aplicação.

05. Séries e Convergência. Séries de Taylor e Maclaurin.

A dissertação deve contemplar cada um dos itens abaixo:

a) Defina série infinita. Defina série convergente e série divergente. Mostre que a série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$, onde a é uma constante real e $a \cdot r \neq 0$, converge se $|r| < 1$ e diverge se $|r| \geq 1$. Mostre que a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente.
b) Mostre que se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for convergente então $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.
c) Enuncie e demonstre o teste de comparação no limite. Dê exemplos.
d) Enuncie o teste da série alternada e dê exemplos de séries alternadas cuja convergência pode ser comprovada por este teste.
e) Defina série absolutamente convergente e série condicionalmente convergente. Dê um exemplo de cada uma dessas séries.
f) Mostre que se uma série é absolutamente convergente então ela é convergente.
g) Enuncie o Teste da Razão. Dê exemplos de seu uso.
h) Defina série de potências. Defina raio e intervalo de convergência de uma série de potências. Dê exemplos do cálculo do raio de convergência e do intervalo de convergência de uma série de potências.
i) Enuncie o teorema de diferenciação e integração de série de potências. Calcule a integral indefinida $\int \frac{\ln(1-x)}{x} dx$ como série de potências.
j) Expresse a série de Taylor para uma função real $y = f(x)$ centrada em um número real a. Dê um exemplo.