MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
REITORIA
Avenida Rio Branco, 50 – Santa Lúcia – 29056-255 – Vitória – ES
27 3357-7500

CONCURSO PÚBLICO

Edital nº 3/2016
Docentes Mestres e Doutores

Caderno de Provas

314 – MATEMÁTICA I

Instruções

1 Aguarde autorização para abrir o CADERNO DE PROVAS.

2 Após a autorização para o início da prova, confira-a, com a máxima atenção, observando se há algum defeito (de encadernação ou de impressão) que possa dificultar a sua compreensão.

3 A prova terá duração máxima de 4 (quatro) horas, não podendo o candidato retirar-se com a prova antes que transcorram 2 (duas) horas do seu início.

4 A prova é composta de 10 (dez) questões, sendo 5 discursivas e 5 objetivas. O candidato deverá escolher 3 (três) entre as 5 (cinco) questões discursivas, para responder. Caso o candidato responda mais do que 3 (três) questões, em descumprimento à regra, terá a pontuação 0 (zero) atribuída à sua prova.

5 As respostas às questões objetivas deverão ser assinaladas no CARTÃO RESPOSTA a ser entregue ao candidato. Lembre-se de que para cada questão objetiva há APENAS UMA resposta.

6 O CARTÃO RESPOSTA deverá ser marcado, obrigatoriamente, com caneta esferográfica (tinta azul ou preta).

7 A interpretação dos enunciados faz parte da aferição de conhecimentos. Não cabem, portanto, esclarecimentos.

8 O candidato deverá devolver ao Fiscal o CARTÃO RESPOSTA e o CADERNO DE RESPOSTAS, ao termino de sua prova.

9 Os rascunhos contidos no CADERNO DE PROVAS não serão considerados na correção.

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

LEGISLAÇÃO

01 Com base nas afirmativas acerca da Administração Pública Federal, marque (**V**) para as **VERDADEIRAS** e (**F**) para as **FALSAS**.

(   ) É garantido ao servidor público civil o direito à livre associação sindical e aos manifestos, às paralizações e à greve.

(   ) A lei reservará percentual dos cargos e empregos públicos para as pessoas portadoras de deficiência e definirá os critérios de sua admissão no caso de contratação por tempo determinado para atender a necessidade temporária de excepcional interesse público.

(   ) Se um servidor público estável tiver seu cargo extinto, ficará em disponibilidade e terá garantida remuneração até seu adequado aproveitamento em outro cargo.

(   ) Como condição para a aquisição da estabilidade, o servidor público poderá ter que submeter-se à avaliação de desempenho.

(   ) A autonomia gerencial, orçamentária e financeira dos órgãos e entidades da administração direta e indireta poderá ser ampliada mediante contrato, a ser firmado entre seus administradores e o poder público.

A alternativa que indica a sequência **CORRETA** é:

a) F, F, V, F, V
b) F, F, V, V, V
c) V, V, F, F, V
d) V, F, V, F, F
e) F, V, V, V, F

02 Pode-se afirmar, a partir da Lei nº 8112/90, que:

a) Transferência é a investidura do servidor em cargo de atribuições e responsabilidades compatíveis com a limitação que tenha sofrido em sua capacidade física ou mental.
b) A partir da posse do servidor, ele está sujeito ao estágio probatório de trinta e seis meses, período durante o qual será avaliada sua aptidão e capacidade.
c) Com a nomeação do servidor, dá-se a investidura em cargo público.
d) O servidor perderá o cargo em virtude de sentença judicial condenatória transitada em julgado.
e) Com a aprovação do servidor no estágio probatório, poderá exercer quaisquer cargos de provimento em comissão ou funções de direção, chefia ou assessoramento no órgão ou entidade de lotação.

03 Com relação à estrutura organizacional dos Institutos Federais, prevista na Lei nº 11.892/08, é **CORRETO** afirmar que:

a) O Colégio de Dirigentes é órgão deliberativo dos diretores gerais dos campi e o Conselho Superior é o órgão consultivo do Reitor.
b) A Reitoria do Instituto Federal deve ser instalada em local distinto dos seus campi na capital do Estado.
c) Poderá candidatar-se ao cargo de Reitor do Instituto Federal qualquer um dos servidores estáveis da autarquia que tenha pelo menos cinco anos de efetivo exercício e possua o título de doutor.
d) O Instituto Federal é organizado multicampi, sendo que no que diz respeito a pessoal, encargos sociais e benefícios dos servidores. A proposta orçamentária anual não é identificada por campus.
e) A Administração do Instituto Federal é do Reitor e dos Diretores Gerais dos campi.

04 Com base na Lei nº 11.892/08, assinale a alternativa **CORRETA**:

a) Todos os campi do Instituto Federal devem atender ao percentual mínimo de oferta de vagas na educação profissional técnica de nível médio, prioritariamente na forma de cursos integrados.
b) Uma das finalidades dos Institutos Federais é de orientar sua oferta formativa em benefício da consolidação e fortalecimento dos arranjos produtivos, sociais e culturais locais.
c) Um dos objetivos dos Institutos Federais é ofertar educação em todos os níveis e modalidades para atender às demandas sociais.
d) O Instituto Federal tem por objetivo previsto em lei a promoção da educação básica e, em algumas localidades cuja demanda social exista, a educação superior.
e) É finalidade dos Institutos Federais garantir 50% (cinquenta por cento) de suas vagas para o ensino médio técnico.

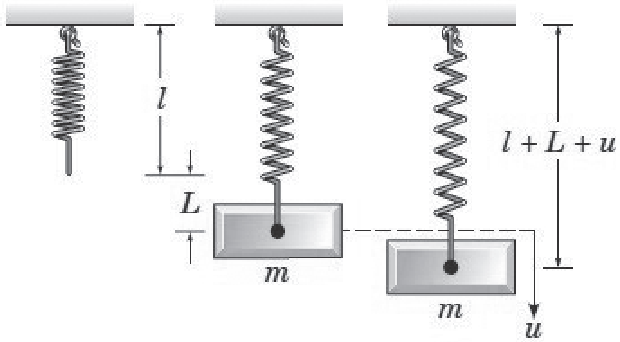
05 No que concerne a Lei nº 9394/96, pode-se afirmar que:

a) É dever do Estado garantir o atendimento ao educando, do ensino fundamental ao médio, por meio de programas suplementares de material didático-escolar, transporte, alimentação e assistência à saúde.
b) É dever do Estado garantir a oferta do ensino fundamental gratuito para os estudantes em idade escolar acima de 06 anos.
c) O ensino será ministrado, entre outros, ante aos princípios da prevalência da experiência escolar e do pluralismo de concepções ideológicas.
d) É dever dos pais ou responsáveis efetuar a matrícula dos menores, a partir dos sete anos de idade, no ensino fundamental.
e) O acesso ao ensino médio gratuito é direito apenas do cidadão que comprova a condição de vulnerabilidade social.

CONHECIMENTOS ESPECÍFICOS

O candidato deverá escolher 3 (três) entre as 5 (cinco) questões discursivas, para responder. Caso o candidato responda mais do que 3 (três) questões, em descumprimento à regra, **terá a pontuação 0 (zero) atribuída à sua prova**

01 O Sistema mecânico massa-mola abaixo



é descrito pela equação diferencial

$$mu''(t) + \gamma u'(t) + ku(t) = F(t) \qquad (1)$$

onde m, γ, $k > 0$ são constantes que representam a massa do objeto, o coeficiente de amortecimento, a constante elástica da mola, respectivamente; e $F(t)$ a força externa sobre o sistema no instante t.

a) Enuncie o Teorema de Existência e Unicidade para um sistema de n equações diferenciais lineares de primeira ordem.

b) Se o coeficiente de amortecimento for $\gamma = 0$ e a força externa for $F(t) = 0$ para todo t, reescreva a equação (1) como um sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem $x'(t) = Ax(t)$ onde $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ e A_{2x2} uma matriz.

c) Considerando o sistema encontrado no item b), resolva o problema de valor inicial $x'(t) = Ax(t), \quad x(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

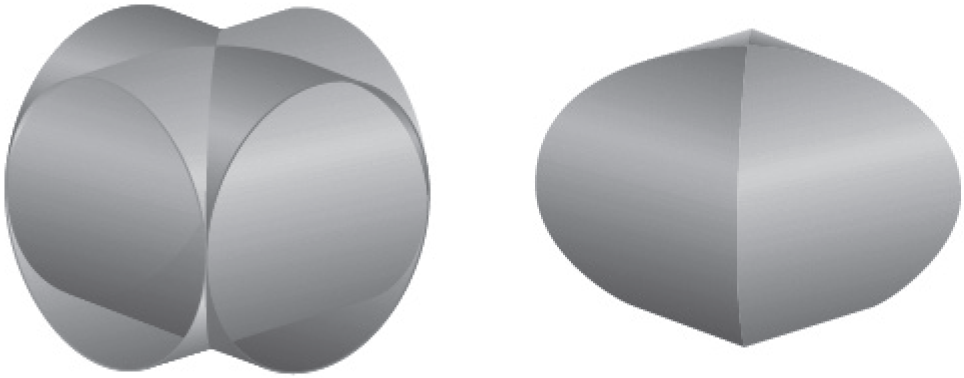
02 Seja V um espaço vetorial com produto interno $<.,.>$. E considere $\|<.,.>\|$ uma norma em V.

a) Sejam v, $w \in V$ com w vetor não nulo. Determine o vetor $proj_w v$ projeção de v sobre w.

b) Seja S um subconjunto não vazio de V. Defina o complemento ortogonal S^* de S e mostre que S^* é um subespaço vetorial de V.

c) Considere o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^4$ com o produto interno $< u,v > = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$, onde $u = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ e $v = (y_1, y_2, y_3, y_4)$; sendo W o subespaço de V gerado por $v_1 = (1,0,0,0)$, $v_2 = (1,1,0,0)$, $v_3 = (-4,-4,1,1)$. Seja $v = (-2,-4,0,2)$, encontre vetores $u_1 \in W$ e $u_2 \in W^*$ tais que $v = u_1 + u_2$.

03 Considere dois cilindros, ambos com raio r, cujos eixos se interceptam em ângulos retos, como na figura abaixo:



Calcule o volume da inteserção dos dois cilindros.

04 Considere a elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a, b \in \mathbb{R}$;

a) utilize uma integral para calcular a área delimitada pela elipse;

b) dado um cilindro reto de base circular de raio r, determine a área da cônica formada pela interseção de um plano que corta o eixo do cilindro por um ângulo de $\frac{\pi}{4}$.

05 Enuncie o Teorema do Valor Médio. Mostre que se $f'(x) = 0$ para todo x em um intervalo (a,b) , então f é constante em (a,b). Dê um exemplo de uma função que não é constante mas tem derivada igual a zero em todo ponto do seu domínio e que não contradiz o resultado anterior.

RASCUNHO

(Não será considerado na correção)

RASCUNHO

(Não será considerado na correção)

RASCUNHO

(Não será considerado na correção)

RASCUNHO

(Não será considerado na correção)

RASCUNHO

(Não será considerado na correção)

RASCUNHO

(Não será considerado na correção)

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
REITORIA
Avenida Rio Branco, 50 – Santa Lúcia – 29056-255 – Vitória – ES
27 3357-7500

CONCURSO PÚBLICO

Edital nº 3/2016
Docentes Mestres e Doutores

Folha de Resposta
(Rascunho)

314 – MATEMÁTICA I

Questão	Resposta
1	
2	
3	
4	
5	

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
REITORIA
Avenida Rio Branco, 50 – Santa Lúcia – 29056-255 – Vitória – ES
27 3357-7500

CONCURSO PÚBLICO
EDITAIS Nº 02 e 03 / 2016

Professor do Magistério do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico

PROVA DE LEGISLAÇÃO

GABARITO

Questão	Resposta
01	A
02	ANULADA
03	D
04	B
05	ANULADA

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
REITORIA
Avenida Rio Branco, 50 – Santa Lúcia – 29056-255 – Vitória – ES
27 3357-7500

CONCURSO PÚBLICO
EDITAL Nº 03 / 2016

Professor do Magistério do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico

ÍNDICE DE INSCRIÇÃO	314
HABILITAÇÃO	Matemática I

PROVA DE CONHECIMENTOS ESPECÍFICOS | DISCURSIVA
MATRIZ DE CORREÇÃO

QUESTÃO 01

Solução:

a) Teorema de Existência e Unicidade: Considere o problema de valor inicial para o sistema de equações lineares de primeira ordem

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t) \\ x_1(t_0) = x_0^1, \quad \cdots \quad , x_n(t_0) = x_0^n \end{cases} \tag{1}$$

onde as funções $a_{ij}, f_i \colon I \to \mathbb{R}$ são contínua e $t_0 \in I$. Então o problema de valor inicial (1) possui solução única no intervalo I.

b) Da equação $mu''(t) + \gamma u'(t) + ku(t) = F(t)$ (1) temos

$$mu''(t) + ku(t) = 0$$

$$u''(t) + \frac{k}{m}u(t) = 0$$

Faça $x_1 = u$ e $x_2 = u'$, assim

$$x_1' = u' = x_2 \text{ e } x_2' = u'' = -\frac{k}{m}u = -\frac{k}{m}x_1.$$

Logo

$$\begin{cases} x_1' = 0x_1 + x_2 \\ x_2' = -\dfrac{k}{m}x_1 + 0x_2 \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \qquad (2).$$

c) Seja $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix}$ então os autovalores de A são dados por

$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = \lambda^2 + -\frac{k}{m} = 0$. Logo temos $\lambda_1 = i\sqrt{\frac{k}{m}}$ e $\lambda_2 = -i\sqrt{\frac{k}{m}}$. Temos que um autovetor $X_1 = \binom{c}{d}$ associado ao autovalor $\lambda_1 = i\sqrt{\frac{k}{m}}$ é dado por

$$AX_1 = \lambda_1 X_1 \Leftrightarrow (A - \lambda_1 I)X_1 = \overline{0}$$

$$\begin{pmatrix} -i\sqrt{\dfrac{k}{m}} & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -i\sqrt{\dfrac{k}{m}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -i\sqrt{\dfrac{k}{m}}c + d = 0 \\ -\dfrac{k}{m}c - i\sqrt{\dfrac{k}{m}}d = 0 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por $-i\sqrt{\frac{k}{m}}$ temos que as equações do sistema acima são múltiplas. Logo, $d = i\sqrt{\frac{k}{m}}c$ e para $c = 1 \Rightarrow d = i\sqrt{\frac{k}{m}}$. Assim, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{\frac{k}{m}} \end{pmatrix}$. Uma solução complexa do sistema (2) é dada por

$$\Phi(t) = e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}} X_1 = \left[cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + isen\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right] \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{\dfrac{k}{m}} \end{pmatrix}$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right) \\ -\sqrt{\dfrac{k}{m}}sen\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right) \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} sen\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right) \\ \sqrt{\dfrac{k}{m}}cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right) \end{bmatrix}.$$

Portanto a solução geral é

$$x(t) = c_1 \begin{bmatrix} cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right) \\ -\sqrt{\dfrac{k}{m}}sen\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} sen\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right) \\ \sqrt{\dfrac{k}{m}}cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right) \end{bmatrix}$$

Para $x(0) = \binom{a}{b}$ temos

$$\binom{a}{b} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{\dfrac{k}{m}} \end{bmatrix} \Rightarrow c_1 = a, c_2 = b\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

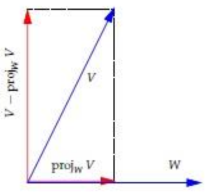
Portanto a solução P.V.I é

$$x(t) = a\begin{bmatrix} cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\ -\sqrt{\frac{k}{m}}sen\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \end{bmatrix} + b\sqrt{\frac{m}{k}}\begin{bmatrix} sen\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\ \sqrt{\frac{k}{m}}cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \end{bmatrix}.$$

QUESTÃO 02

Solução:

a)



Temos que o vetor $proj_w v$ é paralelo a w e que $v - proj_w v$ é ortogonal a v então

$$< v - proj_w v, w >= 0$$
$$< v, w > - < proj_w v, w >= 0$$
$$< v, w > = < proj_w v, w >$$

Como $< proj_w v, w >$ é paralelo a w então existe um escalar α tal que $proj_w v = \alpha w$. Assim,

$$< v, w > = < \alpha w, w > = \alpha < w, w > = \alpha \|w\|^2 \Rightarrow \alpha = \frac{<v,w>}{\|w\|^2}.$$

Portanto,

$$proj_w v = \alpha w = \frac{< v, w >}{\|w\|^2} w.$$

b) Complemento ortognal de S:

$$S^* = \{ \ v, w \in V \backslash < v, w > = 0 \ para \ todo \ \ w \in S\}.$$

Sejam $u, v \in S^*$, $w \in S$ e $\alpha \ \in \mathbb{R}$. Então

$$< u + v, w > = < u, w > + < v, w > = \ 0 + 0 = 0 \ \Rightarrow \ u + v \in S^*;$$
$$< \alpha v, w > = \ \alpha < v, w > = \ \alpha 0 = 0 \ \Rightarrow \alpha v \ \in S^*.$$

Portanto, S^* é subespaço de V.

c) Basta tomar $u_1 = proj_W v$ e $u_2 = v - u_1$. Temos que v_1, v_2, v_3 não formam uma base ortogonal do subespaço W. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt obtemos uma base ortogonal de W,

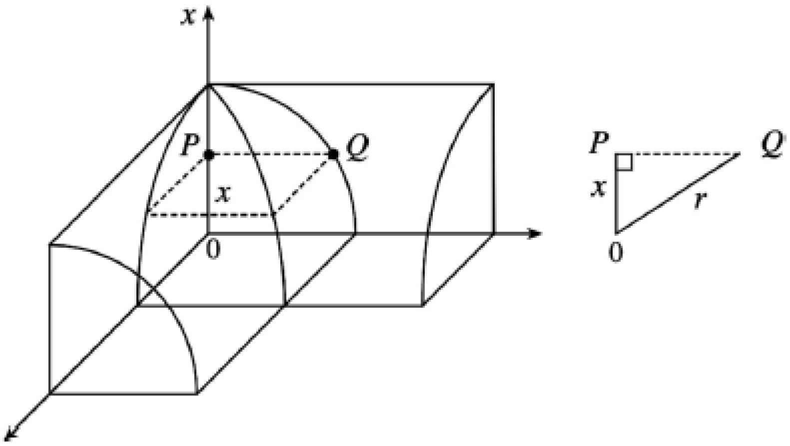
$$w_1 = v_1 = (1,0,0,0)$$
$$w_2 = v_2 - proj_{w_1} v_2 = (0,1,0,0)$$
$$w_3 = v_3 - proj_{w_1} v_3 - proj_{w_2} v_3 = (0,0,1,1)$$

Assim,

$$u_1 = proj_W v = proj_{w_1} v + proj_{w_2} v + proj_3 v = (-2, -4,1,1)$$
$$u_2 = v - u_1 = (0,0, -1,1).$$

QUESTÃO 03

Solução:



Defina S como sendo o sólido gerado pela interseção dos dois cilindros, ambos de raio r, cujos eixos se interceptam em ângulos retos.
Cada secção transversal do sólido S é um plano paralelo ao plano xy cujo formato é um quadrado, uma vez que os bordos do corte gerado pela interseção dos cilindros são perpendiculares.
A figura mostrada acima corresponde a um oitavo do volume total de S.
Utilizando o teorema de Pitágoras encontramos $|PQ|^2 + x^2 = r^2$o que implica que $|PQ|^2 = r^2 - x^2$.
Logo a medida do lado deste quadrado é $2\sqrt{r^2 - x^2}$, cuja área é $A(x) = 4r^2 - 4x^2$.
Portanto o volume do sólido S pode ser escrito da seguinte forma:

$$V = \int_{-r}^{r} A\,(x)dx = 4\int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = 8\int_{0}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = 8\left[xr^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{r} = \frac{16r^3}{3}.$$

QUESTÃO 04

Solução:

a) Definiremos como sendo A a área total da elipse, como esta cônica é simétrica em relação aos eixos, então usaremos a seguinte função definida no primeiro quadrante:
$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ no qual $0 \leqslant x \leqslant a$
Logo

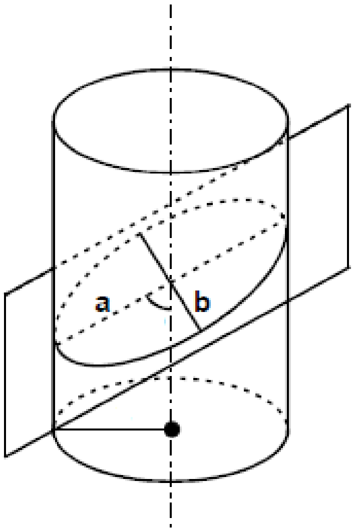
$$A = 4\int_{0}^{a} \left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right) dx$$

Uma vez que $x = asen(t)$ pela substituição trigonométrica, então $dx = acos(t)dt$.
Analisando os limites de integração nesta nova variável temos que: quando $x = 0$ obtemos que $0 = asen(t)$ logo $t = 0$, por outro lado quando $x = a$ obtemos que $a = asen(t)$ logo $t = \frac{\pi}{2}$. Por outro lado
$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2sen^2(t)} = \sqrt{a^2cos^2(t)} = acos(t)$ visto que $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.
Finalizando a questão,

$$A = 4\int_{0}^{a} \left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right) dx = 4\frac{b}{a}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} acos\,(t)acos(t)dt = 4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos^2\,(t)dt,$$

$$4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos^2\,(t)dt = 4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + cos(2t)}{2}\right) dt = 2ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \big(1 + cos(2t)\big)\,dt = \pi ab.$$

b) Dado um cilindro reto de base circular de raio r, a cônica originada pela interseção de um plano que corta o eixo do cilindro por um ângulo de $\frac{\pi}{4}$ é uma elipse (ilustrada na figura abaixo).



Determinaremos os valores de a e b.
Observe que b corresponde ao raio do cilindro reto de base circular, então $b = r$. Por outro lado note que $a$corresponde a hipotenusa de um triângulo retângulo onde b corresponde ao cateto oposto ao ângulo de $\frac{\pi}{4}$.
Logo
$sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{b}{a}$, sabendo que $b = r$,concluímos que $a = \sqrt{2}r$.
Pelo item a), encontramos $A = \pi\sqrt{2}r^2$.

QUESTÃO 05

Solução:

(i) Teorema do Valor Médio: Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e diferenciável em (a, b). Então existe um número $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

(ii) Seja $x_1, x_2 \in (a, b)$ tal que $x_1 < x_2$. Como f é difrenciável em (a, b) então é diferencável em (x_1, x_2) e contínua em $[x_1, x_2]$. Pelo teorema do Valor Médio existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_1 - x_2} \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_1 - x_2).$$

Temos que $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$ então $f'(c) = 0$, assim $f(x_2) - f(x_1) = 0$, ou seja, $f(x_2) = f(x_1)$. Portanto, f é uma função constante.

(iii) Seja $f(x) = \begin{cases} 1 \; se \; x > 0 \\ -1 \; se < 0 \end{cases}$. Temos que $dom(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f'(x) = 0$ para todo $x \in dom(f)$ mas f não é constante. Isso não contraria o resultado anterior pois o domínio da função não é um intervalo.